Διάλεξη 8η

7-11-2019

Διαφορική Γεωμετρία

1

Παράδειγμα 1: Δίνεται η καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$c(t) = (t - \sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t + \sin t), t \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί αναπαραμέτρηση με παράμετρο το μήκος τόξου.
Να βρεθούν καμπυλότητα, στρέψη και πλαίσιο Frenet.

Λύση

Η c είναι προφανώς λεία με διάνυσμα ταχύτητας
$c'(t) = (1 - \sqrt{3}\cos t, -2\sin t, \sqrt{3} + \cos t)$

$\|c'(t)\|^2 = 1 - 2\sqrt{3}\cos t + 3\cos^2 t + 4\sin^2 t + 3 + 2\sqrt{3}\cos t$
$+ \cos^2 t = 4 + 4 = 8 > 0$: κανονική καμπύλη

Μήκος τόξου της c με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι η συνάρτηση $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du = \int_0^t 2\sqrt{2}\, du$

$s = 2\sqrt{2}\, t \Leftrightarrow t = \frac{s}{2\sqrt{2}} = \frac{s\sqrt{2}}{4}$.

Άρα μια αναπαραμέτρηση της c με φυσική παράμετρο είναι $c(s) = \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} - \sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\right.$
$\left. 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}, \sqrt{3} + \cos\frac{s}{2\sqrt{2}}\right)$

$c''(t) = (\sqrt{3}\sin t, -2\cos t, -\sin t)$

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 - \sqrt{3}\cos t & -2\sin t & \sqrt{3} + \cos t \\ \sqrt{3}\sin t & -2\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

$= (2\sin^2 t + 2\cos t(\sqrt{3} + \cos t), -(\sin t + \sqrt{3}\cos t \sin t - 3\sin t -$
$- \sqrt{3}\cos t \sin t), (-2\cos t + 2\sqrt{3}\cos^2 t + 2\sqrt{3}\sin^2 t)$

Άρα $\|c'(t)\times c''(t)\|^2 = 4(1+2\sqrt{3}\cos t + 3\cos^2 t + 4\sin^2 t$ (9)

$+3-2\sqrt{3}\cos t + \cos^2 t) =$

$= 4(4+4) \Rightarrow \|c'(t)\times c''(t)\|^2 = 32$

Άρα η καμπυλότητα της c είναι η συνάρτηση

$\kappa: \mathbb{R}\to(0,\infty)$ με $\kappa(t) = \dfrac{\|c'(t)\times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \dfrac{\sqrt{32}}{(2\sqrt{2})^3} > 0$

Εύρεση πλαισίου Frenet:

$\vec{t}(t) = \dfrac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}\cos t, -2\sin t, \sqrt{3}+\cos t)$

$\vec{b}(t) = \dfrac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|} = \dots$

$\vec{n}(t) = \vec{b}(t)\times\vec{t}(t) =$

Η στρέψη της c είναι η συνάρτηση $\tau:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\tau(t) = \dfrac{[c'(t), c''(t), c'''(t)]}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2} = \dfrac{\langle c'(t)\times c''(t), c'''(t)\rangle}{\|c'(t)\times c''(t)\|^2} = \dots$

(ε) $\tau = \dfrac{1}{4}$, $\kappa(t) = \dfrac{1}{4}$

- Δεν μπορεί να είναι κύκλος γιατί θα πρέπει $\tau = 0$
- Οπότε η c είναι κυλινδρική έλικα
- καμπύλη σταθερής κλίσης

Για καμπύλη σταθερής κλίσης:

$\langle \vec{t}, \omega \rangle = \cos\phi$, $\|\omega\| = 1$

$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\phi$, $\vec{\omega} = \cos\phi\,\vec{t} + \sin\phi\,\vec{b}$

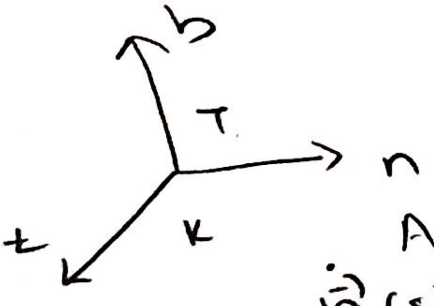
$\frac{\tau}{\kappa} = 1 \Leftrightarrow \phi_0 = \pi/4$, $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{t}(t) + \vec{b}(t))$

$= \dots = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- Δεν είναι σφαιρική καμπύλη
- Επίσης δεν είναι φραγμένος ο τόνος της C.
- Όχι επίπεδη γιατί θα έπρεπε να είναι $Ax(t) + By(t) + \Gamma z(t) + \Delta = 0$, δηλαδή θα είχα γραμμ. σχέση, ενώ ξέρουμε ότι τα συν, sin είναι συνδυασμό και είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 2: Έστω $C: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $\vec{n}(s) = (\sin s, 0, \cos s)$, $\forall s \in I$. Να αποδείξετε ότι η καμπύλη της στρέψη είναι σταθερές. Επιπλέον αν $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C(0) = (0,0,0)$ και $\dot{C}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Να βρεθεί η C.

Λύση



Έχω $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in I$

$\dot{n}(s) = (\cos s, 0, -\sin s)$

$\ddot{n}(s) = (-\sin s, 0, -\cos s)$

Άρα $\ddot{\vec{n}} = -\vec{n}$

$\dot{\vec{n}}(s) = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}$

$\ddot{n}(s) = -\dot{\kappa}\vec{t} - \kappa\dot{\vec{t}} + \dot{\tau}\vec{b} + \tau\dot{\vec{b}}$

$= -\dot{\kappa}\vec{t} - \kappa^2\vec{n} + \dot{\tau}b - \tau^2\vec{n}$

$= -\dot{\kappa}\vec{t} - (\kappa^2 + \tau^2)\vec{n} + \dot{\tau}\vec{b}$, $\ddot{n} = -n$

Άρα $\ddot{\vec{n}} = -\dot{\kappa}\vec{t} - $

Λύνοντας $\begin{cases} -\dot{\kappa} = 0 \Rightarrow \kappa = \text{σταθερή} \\ -(\kappa^2+\tau^2) = -1 \Rightarrow \kappa^2+\tau^2 = 1 \\ \dot{\tau} = 0 \Rightarrow \tau = \text{σταθερή} \end{cases}$

$\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n} \Rightarrow \dot{\vec{t}}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin s, 0, \cos s)$

$\Rightarrow \int_0^s \dot{\vec{t}}(u)du = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^s \sin u\, du, 0, \int_0^s \cos u\, du\right) \Leftrightarrow$

$\dot{c}(s) - \dot{c}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos u\Big|_0^s, 0, \sin u\Big|_0^s\right) \overset{\int}{\Leftrightarrow}$ $\dot{c}(0) = \dots$

$c(s) - c(0) = \dots$

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι οι καμπύλες

$c(t) = (t+\sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \sin t)$, $\tilde{c}(t) = (2\cos t, 2\sin t, -2t)$

Να αποδειχθεί ότι οι καμπύλες είναι γεωμ. ισοδύναμες.

Λύση

$\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, $T = T_v \circ A$

Το μήκος τόξου της καμπύλης c με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι $s = 2\sqrt{2}t$. Το μήκος τόξου $\tilde{c}$ με αφετηρία πάλι το $t_0 = 0$ είναι $\tilde{s} = 2\sqrt{2}t$. Άρα το $s = \tilde{s}$, $c(s) = \left(\frac{s}{2\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 2\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}s - \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right)\right)$

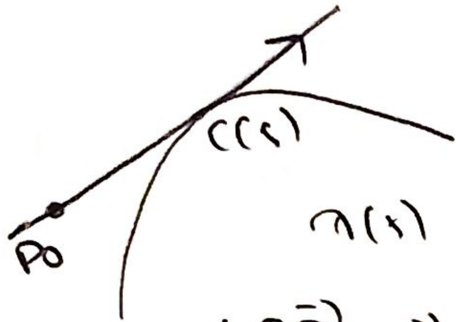
$\tilde{c}(s) = \left(2\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), 2\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}\right), -\frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

Υπολογίζω $\kappa(s) = \frac{1}{4}$, $\tau(s) = -\frac{1}{4}$

$\tilde{\kappa}(s) = -\frac{1}{4}$, $\tilde{\tau}(s) = -\frac{1}{4}$

Άσκηση: Αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας λείας και κανονικής καμπύλης διέρχονται από το ίδιο σημείο τότε η C είναι ευθεία.

Λύση



Διανυσματική εξίσωση εφαπτ. ευθείας $\vec{r} = \vec{c}(t) + \lambda \vec{t}(s)$

Από υπόθεση $\forall s \in I$ υπάρχει $\lambda(s)$ ώστε: $\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{t}(s)$ (*)

$$\langle \vec{OP_0}, \vec{t}(s) \rangle = \langle c(s), \vec{t}(s) \rangle + \lambda(s)$$

$$\Rightarrow \lambda(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec{t}(s) \rangle - \langle c(s), \vec{t}(s) \rangle$$

Άρα $\lambda(s)$ λεία συνάρτηση

Παραγωγίζω την (*) και έχω:

$$\underbrace{0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{t}}(s) \Leftrightarrow \dots \text{ κτλ}}_{\text{Λάθος}}$$

Αρκεί νδο $\kappa(s) = 0$, $\forall s \in I$.

Υποθέτω διά της εναντίας ότι $\exists s_0 \in I$ ώστε $\kappa(s_0) > 0$. Λόγω συνέχειας $\exists \varepsilon > 0$ αρκούντως μικρού τ.ω. $\forall s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$: $\kappa(s) > 0$

άτοπο

Ορισμός: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη με φυσική παράμετρο και καμπυλότητα και στρέψη θετική. Το επίπεδο το οποίο διέρχεται από το $c(s)$ και είναι $\parallel \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ καλείται κάθετο επίπεδο της C στην S.

Άσκηση: Αν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας λείας μοναδιαίας καμπύλης με παντού θετική καμπυλότητα διέρχονται από κοινό σημείο P_0. Τότε η c είναι σφαιρική.

Λύση

Η διανυσματική εξίσωση του κάθετου επιπέδου της c στο s είναι: $\vec{r} = c(s) + \lambda \vec{n}(s) + \mu \vec{b}(s),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Έχω ότι $\forall s \in I,\ \exists\, \lambda(s), \mu(s) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) + \mu(s)\vec{b}(s) \quad (*)$$

$\lambda(s) = \langle \vec{OP_0} - c(s), \vec{n}(s) \rangle \Rightarrow \lambda(s)$ λεία

$\mu(s) = \langle \vec{OP_0} - c(s), \vec{b}(s) \rangle \Rightarrow \lambda(s)$ λεία

Παραγωγίζω την (*) και έχω:

$$0 = t(s) + \dot{\lambda}(s) n(s) + \lambda(s)\left(-\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)\right) + \dot{\mu}(s) b(s) - \mu(s)\tau(s)\vec{n}(s) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = (1-\lambda(s)\kappa(s))\vec{t}(s) + (\dot{\lambda}(s) - \mu(s)\tau(s))\vec{n}(s) + (\lambda(s)\tau(s) + \dot{\mu}(s))\vec{b}(s)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(s)\kappa(s) = 1 \\ \dot{\lambda}(s) = \mu(s)\tau(s) \\ \dot{\mu}(s) = -\lambda(s)\tau(s) \end{cases} \quad ,\forall s$$

$$d(c(s), P_0) = \|OP_0 - c(s)\| \overset{*}{=} \|\lambda(s)\vec{n}(s) + \mu(s)\vec{b}(s)\|$$
$$= \sqrt{\lambda^2(s) + \mu^2(s)}.$$

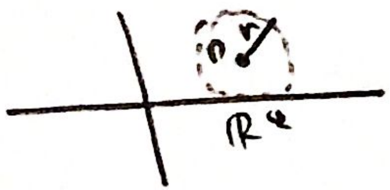
$$(\lambda^2(s) + \mu^2(s))^{\cdot} = 2\lambda(s)\dot{\lambda}(s) + 2\mu(s)\dot{\mu}(s)$$
$$= 2\lambda(s)\mu(s)\tau(s) - 2\mu(s)\lambda(s)\tau(s)$$
$$= 0$$

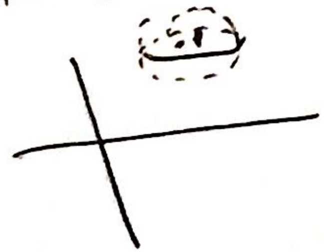
$\Rightarrow \lambda^2(s) + \mu^2(s) =$ σταθερά $\Rightarrow$ $d(c(s), P_0) =$ σταθερά > 0

$$\left(\frac{\kappa}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{\kappa}$$

$\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$, $d(x,y) = \|x-y\|$

$B_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) < r\}$





Επαγόμενη Τοπολογία:

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ορισμός: Το υποσύνολο $X \subseteq A$ καλείται ανοιχτό στο A
$\Leftrightarrow$ $X = \tilde{X} \cap A$ και το $\tilde{X}$ είναι ανοιχτό
του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται συνεχής αν-ν $\forall$ ανοιχτό U του $\mathbb{R}^m$, το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στο A.

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ καλείται ομοιομορφισμός αν-ν: i) η f συνεχής
ii) f είναι 1-1 και επί
iii) η $f^{-1}: B \subseteq \mathbb{R}^m \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής
Λέμε ότι το A είναι ομοιόμορφο του B.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1\}$$

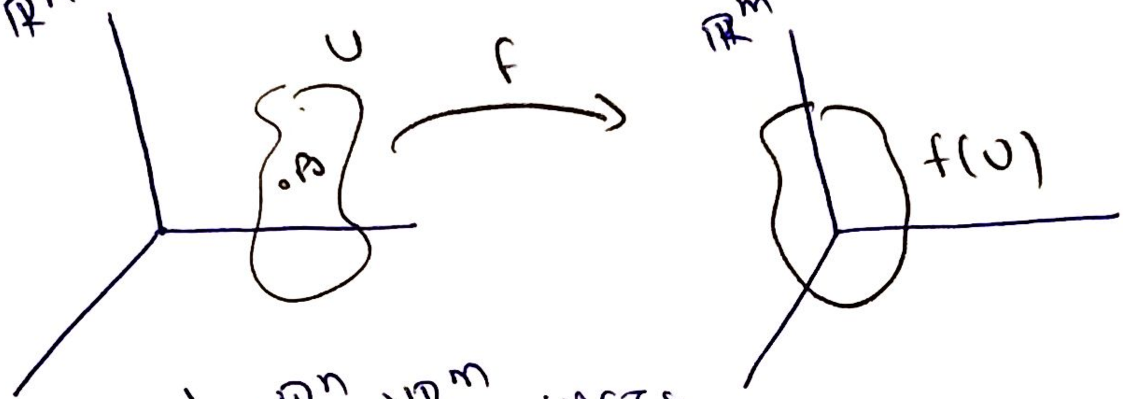
$$f: E \to S^2$$

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{\gamma}\right)$$

$$f'(x,y,z) = (ax, by, \gamma z)$$

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ Ευκλείδ. χώρων

Ορισμός: Μια απεικόνιση $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (U: ανοιχτό) καλείται διαφορίσιμη στο $p_0 \in U$.



$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ώστε

$$\lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{\|p - p_0\|} = 0.$$

L είναι μοναδική και καλείται διαφορικό της f στο p_0.

$L = df_{p_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Ο πίνακας του διαφορικού df_{p_0} ως προς τις συνήθεις βάσεις $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^m$ είναι $m \times n$ πίνακας.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Θεωρώ καμπύλη λεία $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$

$\tilde{c}(0) = f(c(0)) = f(p)$

$df_p: T_p \mathbb{R}^n \to T_{f(p)} \mathbb{R}^m$

Άσκηση

$\tilde{c}'(0) = df_p(w)$